第七章 系統的能量(Energy of a System)

在前面運動學與動力學的章節中，我們學習從牛頓第二運動定律找出合力與運動之間的力等式關係，然後利用解微分方程式來找出運動行為。這樣的解題方式除了遇到數學上要解微分方程式的難題外，更遇到向量的微積分問題，那還有沒有其它較簡單可加速解決問題的方法呢？這一章要引入一個純量-能量-的觀念，有了能量的觀念，有時不需經過複雜求解的計算過程，也能很迅速找到物體運動過程中的一些物理量。這一章先介紹能量的三種表現形式-功、動能與位能，下一章再利用能量的觀念來解決物理問題。

本章先認識系統與環境的定義，了解環境提供系統的外力後，學習計算環境外力傳遞給系統的媒介-功。定義出外力作功後，藉由功轉動能理論，來引入系統接受媒介-功-轉換成系統本身的動能。接著學習以額外施力方式來抵消外力，把外力作功儲存回環境中，讓同學有環境中存在著位能的概念。但在此同時會遇到一個問題：並非所有的環境外力都可用環境位能表示，可以用環境位能表示的外力稱為保守力；是否為保守力，須由外力與位移作向量內積後再線積分運算，不同路徑下線積分得到相同功值即為保守力。在處理環境外力與環境位能的運算與反算時，從位能反算回環境外力須使用新的數學工具-〝梯度〞(gradient)運算，而梯度運算屬數學向量分析的範圍。

7.1 系統與環境

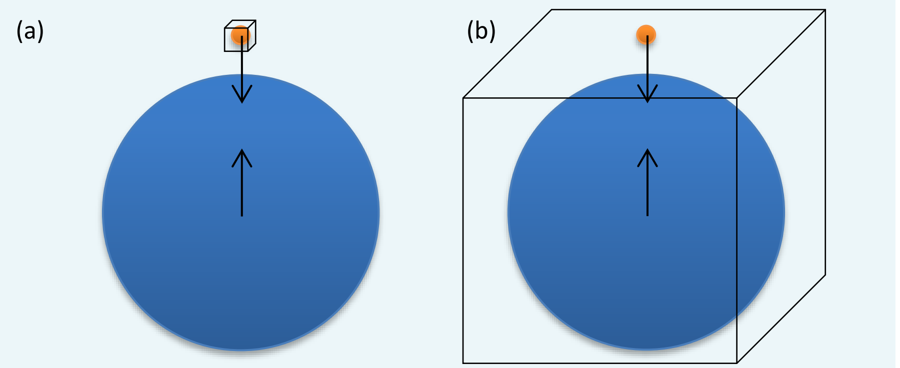

圖 7 - 1 系統與環境的示意圖。

前面章節中曾提到〝系統〞這個名詞，那系統是甚麼？系統是我們要探討的對象，可以只是一個物體，也可以是一整個空間區域，在此區域中包含許多我們要探討的物體。譬如討論一個物體在地球上受重力而運動，把此單一物體視為系統，如圖 7 - 1(a)所示，在黑色框架內橘色物體為系統，框架外其它物體與區域都被視為環境。在框架內只有吸引物體的重力，找不到它所對應的反作用力(不符合牛頓第三運動定律)，因地球正為此物體的環境，而認定此物體受到環境施予外力，所以地球提供給此物體(系統)的〝外力〞即為重力。

接著我們再擴大系統範圍包含物體與地球，如圖 7 - 1(b)所示，此時環境指的是地球以外的太空或其它行星與恆星，屬於此系統的物體與地球間，相互提供對方大小相等方向相反的萬有引力(重力)，此時物體與地球間吸引力視為系統內力，符合牛頓第三運動定律。如不考慮其它恆星與行星的作用力，則圖 7 - 1(b)的系統所受環境外力為零，此零外力的系統亦稱為慣性座標系統。

系統在本章節是我們討論的核心問題，在此空間區域它可以是：

1. 一個單一物體、質點
2. 一群物體(質點或說是粒子)
3. 一整個空間，空間中包含氣體、液體與物體等
4. 尺寸與形狀可變化的物體

初步了解系統與環境後，我們把地表上的座標系統做個整理。之前曾提過地表上水平方向的座標是慣性座標，但考慮到地球自轉的因素後，發現不完全是慣性座標，需要加入柯氏力(假想力)的修正項。不需用假想力來解釋加速度運動行為的座標系統，稱為慣性座標系統。這裡所提到的假想力與外力不盡相同，在座標系統中未施力卻有不為零的力時，要先檢視產生此不為零合力的機制為何，才能判斷是假想力或外力造成。做法上應先擴大系統區域範圍，如是座標轉換造成此力為假想力，且能找到此力來源與相對應的反作用力則稱為外力。

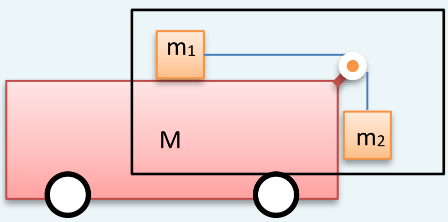

圖 7 - 2 一物體(質量 m_2)下拉另一物體(質量 m_1)作加速度運動，造成車子(質量 M)反向的加速度運動。

例題 7-1：如圖 7-2 所示，一物體(質量 m_1)在無摩擦力車頂上(車子質量 M)，繫一繩子經由滑輪與自由落下的另一物體(質量 m_2)相接，車子靜止在無摩擦力的水平面上，試問當鉛直向下的物體開始拉動車頂上物體的瞬間，物體與車子的加速度各為何？

此例題在示範如何選擇系統及分析系統內受力的情形。

如觀察圖 7-2 黑色方框內的物體與受力， m_2 物體鉛直向下提供張力給 m_1 物體鉛直方向的作用力可以經由滑輪與車子提供向上的力平衡，

但水平方向無摩擦力，因此黑色框架內只有繩子的張力向右，而水平方向有不為零的外力。

將黑色框架範圍擴大到包含車子，觀察到整個系統不受外力，

則拉動 m_1 物體的張力應該要經過滑輪提供給車子向左的推力，如此水平方向才能達到力平衡。

設 m_1 與 m_2 物體分別以加速度 a 向右及鉛直向下，車子以加速度 A 向左，繩子張力 T

在地面上觀察物體與車子的運動，並考慮相對運動問題，

即是 m_1 物體相對於車子運動，車子又相對於地面運動，

則各物體間受力與加速度為

$$m_2 g - T = m_2 a\,,\ T = m_1(a - A),\ T = MA$$

計算後可得
$$a = \frac{(M + m_1)m_2 g}{(Mm_1 + m_1 m_2 + m_2 M)}$$

與車子加速度
$$A = \frac{m_1 m_2 g}{(Mm_1 + m_1 m_2 + m_2 M)}$$

7.2 向量內積

在計算外力作功，外力與位移都是向量、功是能量，必須要處理兩個向量相乘變成純量的內積計算。

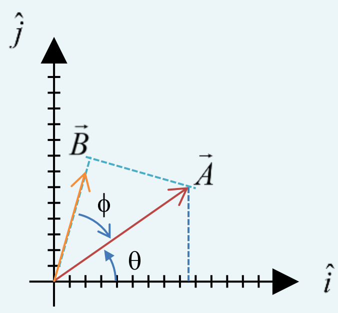

圖 7-3 內積與投影量關係圖。

一個二維空間的向量 $\vec{A}$，可以用座標系統的分量表示為 $A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$，內積是先找出向量 $\vec{A}$ 在 x 軸上投影量的大小 A_x，再從 A_x、A_y 分量與向量長度 $|\vec{A}|$ 所圍成的直角三角形的幾何關係，又可找到向量 $\vec{A}$ 在 x 軸上投影量等於 $A\cos\theta$ (如圖 7 - 3 所示，θ 為向量 $\vec{A}$ 與 x 軸的夾角)，為了求得其它向量在 x 軸上的投影量，甚至進一步計算出向量 $\vec{A}$ 在其它向量上的投影量大小，我們需先找到座標系統上單位向量之間的內積關係。

因為單位向量的長度是 1，所以可找到單位向量各自投影在自身方向的值應該是 1，亦即

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1\text{，}\hat{j}\cdot\hat{j}=1\text{，}\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

接下來，因為笛卡兒座標系統屬於直角座標系統，且單位向量與單位向量之間兩兩相互垂直所以投影量為 0，表示為

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

有了這個簡單的關係後，我們可以用內積來計算向量 $\vec{A}$ 在 x 軸上投影量的大小，計算方式為

$$A_x=\vec{A}\cdot\hat{i}=\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}\right)\cdot\hat{i}=A_x\hat{i}\cdot\hat{i}+A_y\hat{i}\cdot\hat{j}=A_x$$

當然也可以計算向量 $\vec{A}$ 在 y 軸上的投影量。此外，我們可利用之前熟悉的任意兩個向量($\vec{A}$ 與 $\vec{B}$)內積的公式，推導如下

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}\right)\cdot\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}\right)\\&=A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i}+A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j}+A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i}+A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j}\\&=A_xB_x+A_yB_y\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y \tag{7.2-1}$$

更進一步，我們可以運用前面所提到的幾何關係，如 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的夾角為 ϕ (如圖 7 - 3 所示)，則 $\vec{A}$ 在 $\vec{B}$ 的單位向量 $\hat{B}=\vec{B}/|\vec{B}|$ 上的投影量為 $|\vec{A}|\cos\phi$，可以寫下這樣的關係式

$$\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=|\vec{A}|\cos\phi$$

即是 $$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \tag{7.2-2}$$

任意兩個向量內積的運算，其分量表示法為 7.2-1 式，而幾何表示法為 7.2-2 式。

例題 7-2：試計算兩向量間內積與夾角。(a) $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}$ 與 $\vec{B}=-2\hat{i}-4\hat{j}$。(b)

$\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ 與 $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ 。

(a)

向量內積由分量計算 $\vec{A}\cdot\vec{B}=2\times(-2)+(-3)\times(-4)=8$

夾角由幾何關係計算

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{8}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$$

亦可由計算機計算出夾角 $\theta\cong 60^\circ$

(b)

向量內積由分量計算 $\vec{A}\cdot\vec{B}=2\times1+3\times2+(-1)\times3=5$

夾角由幾何關係計算 $\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\dfrac{5}{14}$

7.3 定力作功

在一維的座標系統中，物體在未受力狀況下以等速度直線運動(符合牛頓第一運動定律)，此時如受外力則會產生一加速度來改變物體速度，所以外力作用所改變的狀態是物體的速度。如對物體施力方向與速度方向相同，我們發現 ***在外力作用一段時間後，物體由低速度狀態轉變為高速度狀態***，代表在外力作用下把某種〝媒介〞傳給了物體，我們稱這個媒介為能量，而這個過程稱為外力對物體作功。

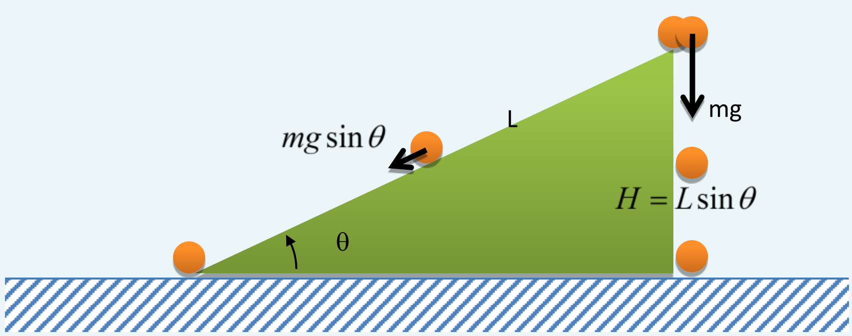

圖 7-4 由斜坡來推測作功的計算。

外力作功會改變物體的運動狀態-速度，那麼功這個 " 能量 " 該如何計算？我們用斜坡(如圖 7-4 所示)來了解功。在實際經驗上，我們發現物體沿斜坡

運動與自由落體掉到桌面，這兩種方式到達桌面的速度大小相同(但方向不同)，速度相同即表示運動狀態相同，也就是在最高點時都是零速度的狀態，並以相同速率到達桌面；自由落體的運動軌跡是由重力 mg 直接作用，而物體沿著斜坡滑下是由重力在斜坡方向的分力 $mg\sin\theta$ 作用。找到力之後，要如何計算出作功的大小呢？而且沿斜坡與自由落下對物體的作功值需相同，因為掉到桌面上時物體的速度大小相同。如果沿斜坡與自由落體的功一樣，那自由落下的物體所受外力較大，應乘上一個較小值的物理量，這個值可能是時間或是位移。如果功是外力乘上時間，則第 6.1 章所提等速率圓周運動，在向心力不斷作用、時間不斷增加下，而速度大小卻沒有變化便是不合理的情況。如果功是外力乘上位移，則圖 7-4 中沿斜坡與自由落體的外力乘位移分別為

$$mg\sin\theta L \text{ 與 } mgH = mgL\sin\theta$$

恰好所作的功相同，即掉下桌面時的速度大小相同。此外，如果功是外力乘上位移，在等速率圓周運動的例子，向心力在圓弧位移方向上的分力為 0，因此所作功為 0，則可為不變的速率作合理解釋。

功的符號定義為 W ，外力 F 對物體作功，使物體沿著外力的方向位移一段距離 S ，則功的計算為

$$W = FS \qquad (7.3\text{-}1)$$

功的單位為焦耳(J)也等於牛頓×公尺(N·m)。如果外力與位移間有一夾角 θ ，則作功要以外力在位移上的分量 $F\cos\theta$ 乘上位移的距離，因此功的計算為

$$W = FS\cos\theta$$

外力在位移方向的分量為 $F\cos\theta$ ，就可以把作功改成向量的表示法

$$W = FS\cos\theta = FS\frac{\vec{F}\cdot\vec{S}}{FS} = \vec{F}\cdot\vec{S} \qquad (7.3\text{-}2)$$

這裡的位移向量 $\vec{S}$ 即為 $\Delta\vec{r}$ 。

例題 7-3：一物體在二維座標系統中受外力 $\vec{F} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ (牛頓)而產生位移 $\Delta\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ (公尺)，試問物體受外力作功多少焦耳？

從 7.3-2 式作功的向量內積計算方法

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right)\cdot\left(2\hat{i} + 3\hat{j}\right) = 18 \text{ (焦耳)}$$

例題 7-4：如圖 7-5 所示，質量 10 公斤的物體，受一水平向下 30° 角、20 牛頓的外力作用，考慮物體與桌面間動摩擦係數 $\mu_k = 0.2$ ，試計算物體移動 10 公尺後，外力所作的功與摩擦力所作的功各為多少？(重力加速度 $g = 9.8$ (公尺/秒 ²))

外力作用水平向右的分量 $20\cos\left(30^{\circ}\right) = 17.3$ (N)

外力作用鉛直向下的分量 $20\sin\left(30^{\circ}\right) = 10$ (N)

物體對桌面的正向力為重力加外力向下的分力 $N = 10 \times 9.8 + 10 = 19.8$ (N)

動摩擦力大小為 $N\mu_k = 19.8 \times 0.2 = 3.96$ (N)

摩擦力方向與運動方向相反，消耗掉功 $W = 3.96 \times 10 = 39.6$ (J)

外力作功為 $W = 17.3 \times 10 = 173$ (J)

物體接受外力的作功為 $W = 173 - 39.6 = 133.4$

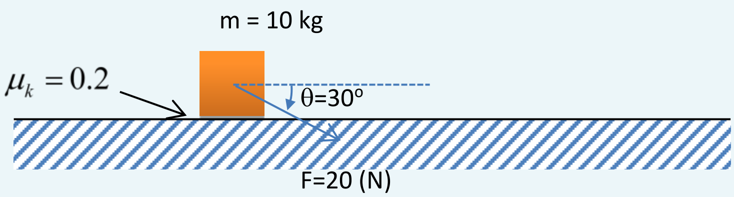

圖 7 - 5 物體受外力作功並抵消摩擦力所作的功。

7.4 變力作功

前一節討論定力下所作的功為外力與位移的內積，如果在不同位置上的外力大小改變，又該如何計算作功大小？就像前面學習積分時一樣，對於變力作用下的功，以每一小段距離 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots$ 乘上物體在該位置的受力 $F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, \ldots$，最後把所有作功加總起來，可表示為

$$\Delta W = F_{x_i}\Delta x_i,\ \ W = \sum_{i=1}^{N} F_{x_i}\Delta x_i$$

如果把每一小段的位移量再縮小，就可以積分的方式來計算功，表示為

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (7.4\text{-}1)$$

如果是二維或三維空間上外力作功的問題，則要用向量線積分，但也只是把上面的式子改為向量與內積的表示

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (7.4\text{-}2)$$

接下來用幾個例子來示範變力作功的計算。

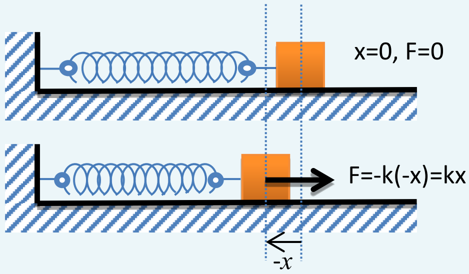

圖 7 - 6 彈簧壓縮產生外力對物體作功。

變力作功最常舉的例子就是彈簧施予物體的外力，即藉由彈簧施力對物體作功產生運動。如圖 7 - 6 所示，假設彈簧的彈性係數為 k ，如彈簧為原來的長度時，則物體在 $x'=0$ 位置上，當物體位移到 $x'=-x$ 位置時，彈簧被壓縮 x 長度，此時彈簧對物體施力為 $-k(-x)=kx$ (反之如果彈簧伸長 x 長度，則彈簧對物體施力為 $F=kx$)。在一維的運動中，彈簧變力作功可由 7.4-1 式計算

$$F=-kx\,,\quad W=\int_{x_1}^{x_2}(-kx)dx=\left[-k\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=-k\frac{x_2^2}{2}+k\frac{x_1^2}{2}$$

這裡計算出外力對物體作功，如功大於零即表示物體增加〝功〞的能量。帶入 $x_1=0$ 與 $x_2=-x$ ，發現 $W=-kx^2/2$ ，功小於零即代表相反方向的作功，也就是彈簧在被壓縮的過程中，因物體對彈簧作功反而損失能量。

例題 7-5：如圖 7 - 7 所繪製的外力與位移關係圖，試從關係圖中找出此外力對物體作功大小。

如 7.4-2 式所示，功的計算為外力對位移積分，我們從微積分知識中可知：

如將外力隨位移變化的函數 $F(x)$ 與位移 x 繪成圖，

所以積分表示計算該函數與 x 軸之間所圍的面積大小。

如此可直接估計圖 7 - 7 藍色區域面積為作功大小

$$W=10\times10\div2=50 \text{ (J)}$$

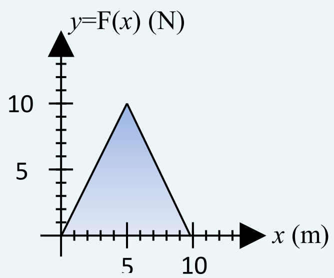

圖 7 - 7 外力與物體位移的函數圖形。

例題 7-6：一物體在變力 $\vec{F}=3x^2\hat{i}+4\hat{j}$ (牛頓)作用下，從位置 $\vec{r}=2\hat{i}+3\hat{j}$ (公尺)移動到 $\vec{r}=4\hat{i}+\hat{j}$ (公尺)，試問外力對物體作功大小？

這個例題要示範 7.4-2 式向量內積的積分運算，同學只要用原本內積運算、配合對不同變數分別作積分的計算，即可得到作功大小。

外力作功為 $W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$

在二維的笛卡兒座標系統下，位移的微小變化量可用分量表示為 $d\vec{r}=\hat{i}dx+\hat{j}dy$

帶入外力與位移微小變化量 $W=\int_{x=2,y=3}^{x=4,y=1}\left(3x^2\hat{i}+4\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}dx+\hat{j}dy\right)$

先完成內積運算 $W=\int_{x=2}^{x=4}3x^2dx+\int_{y=3}^{y=1}4dy$

直角坐標的好處就是 x 與 y 之間互相獨立，計算 x 時可以把 y 當作常數

完成積分運算，可得作功大小 $W=\left[x^3\right]_2^4+\left[4y\right]_3^1=56-8=48$ (J)

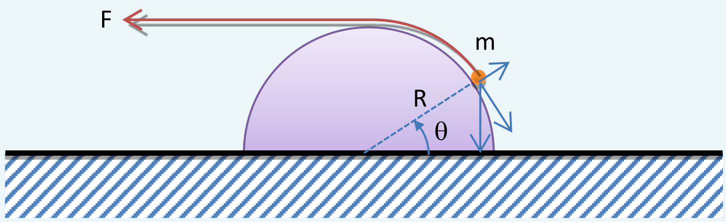

圖 7 - 8 繩子將物體拉上半圓柱的上方。

例題 7-7：如圖 7 - 8 所示，一物體(質量 m)受繩子的外力抵消重力，並靜止在半徑為 R 的半圓柱表面上，如用此外力使物體自桌面以等速率運動達半圓柱頂部，試問外力對物體作功為何？(假設重力加速度為 g)

從圖中對此物體的外力分析得知，物體受重力 mg 與原柱提供的正向力 $mg\sin\theta$

外力藉由繩子的拉力 F 與物體重力在圓柱的切線方向分力 $mg\cos\theta$ 達平衡

不論是靜止或是等速率運動都表示 $F=mg\cos\theta$ (朝 θ 增加的方向為正)

由 7.4-1 式計算外力作功為 $W=\int Fds$

注意這裡的位移是圓弧長，因此以 ds 計算而不是 dx，圓弧長與角度關係為 $ds=Rd\theta$

改寫作功大小的計算為 $$W=\int_0^{\pi/2}(mg\cos\theta)Rd\theta$$

積分後整理可得 $$W=[mg\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}=mg$$

7.5 作功轉換為動能

前面曾經學習到：外力作功可以改變物體運動的狀態-速度，而且藉由作功可把能量這個媒介傳給物體，此外我們經由推導作功等於外力乘上位移。這些問題都能夠從功轉動能理論中找到解釋，並且定義出物體運動時所攜帶的能量-動能-的概念。

功轉動能理論

在前一節計算外力作功時我們只把焦點放在外力，並從外力乘上位移求得功的大小，並沒有考量到物體受外力後會有速度與加速度的改變。現在要把焦點由外力轉移到物體上，我們重新把 7.4-1 式改寫為以物體為主角的計算，並試圖找出物體運動狀態的改變。假設物體的質量為 m ，在外力 F 的作用下，力等式為

$$F=ma$$

將此力等式帶回功的積分運算，可得

$$W=\int Fdx=\int madx$$

這裡遇到與之前解微分方程式時相同的問題，加速度是位移對時間兩次的微分，因此要藉由速度(位移對時間一次微分)來做變數的轉換，我們把加速度與位移的微小變化量分別修正為

$$a=\frac{dv}{dt},\quad dx=\frac{dx}{dt}dt$$

則作功的計算修正為

$$W=\int m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt}dt=\int mv\frac{dv}{dt}dt=\int mvdv$$

最後再把始點(位移在 x_1 時速度為 v_1)與終點(位移在 x_2 時速度為 v_2)的條件帶入上式，整理後可得

$$W=\int_{v_1}^{v_2}mvdv=\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (7.5\text{-}1)$$

由上式得知如果把焦點集中在物體身上，則會發現外力做的功讓物體的運動狀態-速度-產生變化。再詳細解讀 **7.5-1 式**，我們不難發現慣性質量是影響外力作功改變物體運動狀態(速度)的主要角色，同樣大小的功作用在相對慣性質量大的物體上，則速度改變相對較小。

動能

由 **7.5-1 式**作功轉換成一個與速度有關的新的物理量，此新的物理量在起點與終點兩個時間點的差即為外力作功的大小，如果在物體速度為零時讓這個物理量等於零，則這個物理量可以表示為

$$K(v)=\frac{1}{2}mv^2 \tag{7.5-2}$$

我們稱這個新的物理量為動能，用符號 K 來表示。功與動能都是能量，物體與環境之間的轉換即由能量作媒介。

例題 7-8：一個質量 6 公斤的物體，在位置為 $2\hat{i}-\hat{j}$ (公尺)時速度為零，在外力 $\vec{F}=3\hat{i}+\hat{j}$ (牛頓)作用下移動到終點位置 $3\hat{i}+2\hat{j}$ (公尺)，試計算物體在終點的速度為何？

先計算外力作功

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=\left(3\hat{i}+\hat{j}\right)\cdot\left(\left(3\hat{i}+2\hat{j}\right)-\left(2\hat{i}-\hat{j}\right)\right)=3+3=6 \text{ (J)}$$

外力作功造成動能變化表示為 $\Delta K=\frac{1}{2}6\cdot v^2-0=W=6$

可求得速度為 $v=\sqrt{2}$ (m/s)

7.6 系統位能

對於物體在外力作用下運動的例子，如將物體視為系統，則外力則由環境提供。外力作功可以轉換成系統(物體)的動能來改變物體的速度，那外力作功能否當成是一種能量？

環境的能量可以從物體在地表上受重力的例子來解釋，物體(系統)受到地球(環境)提供重力，當我們把物體從高的位置自由落下一段距離後，物體的速度與動能皆增加，如果在環境中存在有一種能量，則高的位置應該是能量較大，低的位置則是能量較小，為了計算這個環境的能量大小，我們需對物體施力來抵消重力，藉此把能量存回物體的環境。

重力位能

一質量 m 的物體受重力向下，設鉛直向上為 $\hat{k}$，則重力為

$$\vec{F} = -mg\hat{k}$$

如為了將能量儲存回環境轉換成環境的能量，則我們需對物體施力來抵消重力，施力為

$$\vec{F}' = mg\hat{k}$$

如由低處 y_1 把物體提高到 y_2 ，則儲存回環境的能量為

$$\Delta U = \int_{z_1}^{z_2} \left(mg\hat{k}\right) \cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} \left(mg\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{i}\,dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz\right) = \int_{z_1}^{z_2} mgdz$$

$$\Delta U = mg\left(z_2 - z_1\right)$$

我們把環境的能量稱為位能，用符號 U 來表示。

作功與位能的計算唯一不同點為正、負號，如果外力為 $\vec{F}$ ，則外力作功為

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

環境儲存的位能為

$$\Delta U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (7.6\text{-}1)$$

當外力對物體作正功則物體獲得動能，而同時外力所在的環境損失位能。

彈性位能

另一個例子是彈簧的壓縮與伸長造成物體的運動，如本章第 7.4 節圖 7 - 6 所示，彈簧對物體施予的外力為

$$F = -kx$$

則彈性位能為

$$\Delta U = -\int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

如起點位置為彈簧原長(伸長量為零， $x_1 = 0$)，則彈簧伸長或壓縮 x 長度所儲存的位能為 $kx^2/2$ 。

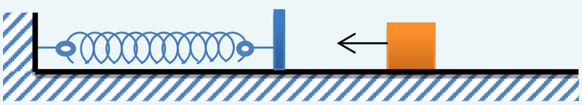

圖 7 - 9 等速運動的物體壓縮彈簧。

例題 7-9：如圖 7 - 9 所示，質量 0.5(公斤)的物體在水平桌面上以速度 1(公尺/秒)在無摩擦力桌面上滑行，碰撞彈性係數 $k = 50$ (牛頓/公尺)的彈簧，並壓縮彈簧直到速度減至 0，試問彈簧壓縮長度為何？

彈簧壓縮是因為物體的動能轉換成彈簧位能

物體動能為 $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(0.5)\times 1^2=0.25$ (J)

轉換成彈簧位能壓縮距離 d 則 $\frac{1}{2}kd^2=25d^2=0.25$

可得到彈簧壓縮的長度為 $d=0.1$ (m)

萬有引力位能

我們知道地表上的重力所造成的重力加速度大小，只有在地表上下高度差異值不大的位置上才約略可用一個常數向量來表示，而且所謂的重力是指鉛直向下指向地心的意思。現在把物體在地球上所受的萬有引力，與物體質心至地心的距離平方成反比、與物體質量 m 及地球質量 M 成正比的完整式子表示出來

$$\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

其中 G 是萬有引力常數，$-\hat{r}$ 代表萬有引力為吸引力，物體在指向徑度的方向上，而引力在反方向吸引住物體，使物體留在地球表面上。再來利用 7.6-1 式計算萬有引力位能

$$\Delta U=-\int\left(-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{l}$$

計算時為了避免符號上的混淆，我們把原本 7.6-1 式中的位移微小變化量 $d\vec{r}$ 改為路徑微小變化量 $d\vec{l}$ ，處理萬有引力問題時，我們把座標系統的原點放在球心位置，因為地球是呈現球對稱的空間分布，對於球對稱的物理問題我們應該利用球座標系統，而且球座標系統中的路徑變化量，可以分為徑度方向 $\hat{r}dr$ 與其它兩個角度方向，因為地心引力是沿著徑度方向並與其它兩個角度方向相互垂直，因此位能的計算可以寫為

$$\Delta U=-\int_{r_1}^{r_2}\left(-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\right)(\hat{r}dr)$$

$$\Delta U=\int_{r_1}^{r_2}\frac{GMm}{r^2}dr$$

接下來在繼續計算之前，我們想辦法找出地心引力位能的參考位置 r_1，先假設宇宙間沒有其它星球與恆星的存在，當物體離開地球球心到無窮遠處 ($r_1\to\infty$)，地球的引力應該消失且設定在位能為零的位置，則地球萬有引力的位能可修改成絕對位能的計算，即為

$$U(r_1)=\int_{\infty}^{r_1}\frac{GMm}{r^2}dr=\left[-\frac{GMm}{r}\right]_{\infty}^{r_1}=-\frac{GMm}{r_1}$$

因此在任意位置與地心距離為 r 的位能為

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}$$

7.7 保守力與非保守力

接下來我們再進一步的思考，是不是所有的外力都可以找到相對應的位能呢？可以以向量內積積分計算位能差，即表示有位能嗎？

位能是指在一個位置上只有一個純量數值，不因到達該位置的路徑不同而在同一位置出現第二個位能值。並非所有外力都能找到對應的位能，可以以位能表示的外力稱為保守力，不能以位能表示的外力稱為非保守力。

保守力

保守力即在每一位置上能找到唯一位能的外力，滿足保守力的條件：

1. 保守力對物體作功，使物體由 A 點位置移動到 B 點位置，且作功的大小僅與位置有關，與所走的路徑無關。
2. 保守力對物體作功由 A 點出發，繞任一路徑仍回到 A 點，其所作的功為零。

以上兩個條件相同，只需檢視外力是否符合其中任一條件，則此外力即稱保守力。接下來藉由例題來示範保守力條件的運算。

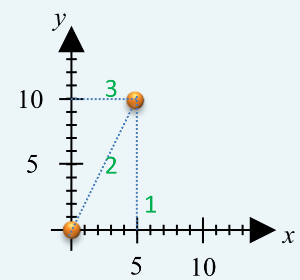

圖 7 - 10 外力積分的路徑圖。

例題 7-10：一質量 4(公斤)的物體受外力 $\vec{F}=3\hat{i}+5\hat{j}$ (牛頓)作用，從起點 $\vec{r}_i=0\hat{i}+0\hat{j}$ 移動

到終點 $\vec{r}_f = 5\hat{i} + 10\hat{j}$。(a)請找出三個路徑，檢查此外力作功大小是否相同。(b)試問從起點到終點位能變化為何？

(a)

先如圖 7 - 10 規劃三個路徑：

第一個路徑作功為 $W = \int_{\vec{0}}^{5\hat{i}+0\hat{j}} \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}\,dx\right) + \int_{5\hat{i}+0\hat{j}}^{5\hat{i}+10\hat{j}} \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}dy\right)$

計算出作功大小 $W = 15 + 50 = 65$ (J)

第二個路徑作功為 $W = \int_{t=0}^{t=5} \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}\,dt + 2\hat{j}dt\right)$

計算出作功大小 $W = 15 + 50 = 65$ (J)

第三個路徑作功為 $W = \int_{0}^{0\hat{i}+10\hat{j}} \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}dy\right) + \int_{0\hat{i}+10\hat{j}}^{5\hat{i}+10\hat{j}} \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}\,dx\right)$

計算出作功大小 $W = 50 + 15 = 65$ (J)

此三個路徑作功大小皆相同，即可證外力作功與路徑無關。

(b)

位能變化為負的作功 $\Delta U = -W = -65$ (J)

負號代表位能損失而物體動能增加。

7.8 保守力與位能

一維運動物體在外力 $F(x)$ 的作用下，位能的大小為

$$U(x) = -\int F(x)dx$$

位能 U 是由微小變化量 dU 積分而得，因此與外力的關係為

$$dU = -F(x)dx$$

再將位移的微小變化量移到等號左邊，則外力可由位能計算如下

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{7.8-1}$$

由上式可知，保守力可以對位移積分求得位能，位能亦可對位移微分找回保守力。譬如彈簧(彈性係數為 k)對物體所施的外力為保守力，位能大小為 $kx^2/2$，由 7.8-1 式計算可找回原外力大小

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{kx^2}{2}\right) = -kx$$

恰為本章第 7.4 節變力作功中所描述的彈簧外力。

已知一維座標系統環境的位能 $U(x)$ 如圖 7 - 11 中的黑色曲線，因位能對

x 微分為位能函數在該位置上的斜率，而外力為此斜率的負值，因此位能函數上正的斜率表示往 $-\hat{i}$ 方向的外力，而負的斜率表示往 $\hat{i}$ 方向的外力。圖 7 - 11 中，在 $x=11$ 位置上位能的斜率為正(紅色直線)，表示此位能對物體作用力為 $-\hat{i}$ 方向，即把物體推回原點方向；反之在 $x<0$ 的範圍位能斜率小於零，外力為 $\hat{i}$ 方向又把物體推回原點方向。物體在這隨位移變化的位能中，會受外力作用在原點附近來回運動。

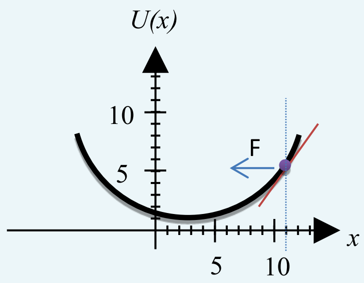

圖 7 - 11 一為座標系統中環境位能與外力之間的關係。

實際上(至少在二維或三維座標系統中)位能的計算是向量內積的積分，因此要反算找出外力，同學便需要學習從純量 $U(x,y,z)$ 得到向量 $\vec{F}(x,y,z)$ 的計算方法。這樣的計算方法稱為梯度(gradient)計算。梯度計算與物體(系統)所使用的座標系統有關，這裡會先學習笛卡兒座標系統的梯度運算，在後面靜電學的章節中，我們會再進一步學習圓柱座標系統與圓球座標系統的梯度運算。

從位能向量內積的積分算式(7.6-1 式)出發，可以把位能的微小變化量寫為

$$dU=-\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

在笛卡兒座標系統中，外力與位移的微小變化量可用分量表示為

$$dU=-\left(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}dx+\hat{j}dy+\hat{k}dz\right)$$

$$dU=-F_xdx-F_ydy-F_zdz$$

因直角座標系統的三個軸方向表現出相互垂直及獨立的特性，所以在處理 x 變數的微分計算時，可以把 y 與 z 變數當作常數，因此得到

$$F_x=-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

因為三軸相互獨立特性，使得全微分運算(符號 d)變成為偏微分運算(符號 ∂)。因此我們把位能計算外力的梯度運算從新整理為

$$\vec{F}=-\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x}-\hat{j}\frac{\partial U}{\partial y}-\hat{k}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (7.8\text{-}2)$$

一般也用梯度符號 $\vec{\nabla}$ 來表示梯度運算，把上式更改為

$$\vec{F} = -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = -\vec{\nabla}U \qquad (7.8\text{-}2)$$

梯度符號 $\vec{\nabla}$ (屬於向量分析數學工具的範圍)只表示要作梯度運算，同學不需過度害怕這個符號。

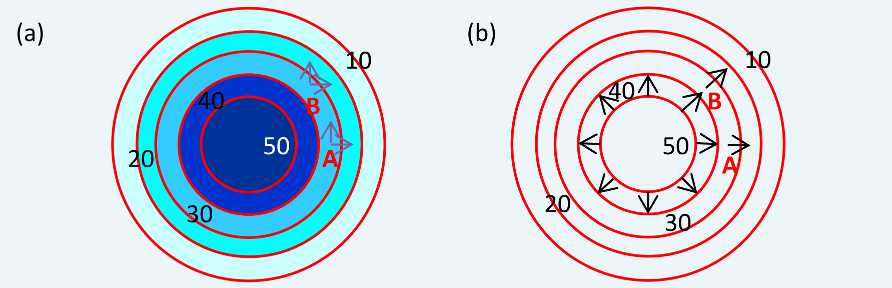

圖 7-12 位能與梯度運算的圖解。

我們試圖從圖 7-12 來解釋梯度運算，左圖(a)為二維空間中位能的顏色表示法，為了標示出位能值(圖中的數字)大小的差異，一般以顏色來區分，這裡我們用深色代表位能值大(高位能)，淺色代表位能值小(低位能)的區域。同學可以將此圖想像成等壓線圖，中間內圈壓力大、外圈壓力小，應該會產生風從圓心呈放射線向外吹(圖 7-12(b))，這個風就是由壓力的梯度計算出來。譬如圖 7-12(a)中的 A 點位置，在計算梯度運算時，往上的箭頭因位在同一位能區域，變化量為零，而往右的箭頭跨過不同位能區域所以位能值變化為-10，從 7.8-2 式的計算更改為變化量的計算方式

$$F_x = -\Delta U/\Delta x\,,\quad F_y = -\Delta U/\Delta y$$

注意上式中的負號，把原本負位能值變化(-10)變成正值，因此指向如圖 7-12(b)所示向右方的外力(A 位置的黑色箭頭)。又如圖 7-12(a)中的 B 點位置，在計算梯度運算時，往上的箭頭與往右的箭頭都跨過不同位能區域，且位能值變化皆為-10，所以我們會得到如圖 7-12(b)所示指向右上方的外力(B 位置的黑色箭頭)。同理可以找出所有放射型向外的外力，或者同學可想像成等壓線地圖上由中心向外放射吹出的風。

保守力條件

在了解位能 U 與保守力 $\vec{F}$ 之間的微分運算關係後，我們還可以重新檢視第 7.7 節的保守力成立的條件，原本的條件任何路徑之下，外力 $\vec{F}$ 積分計算所得到的作功大小必須相同。曉得外力 $\vec{F}$ 的積分運算是位能 U 後，我們可以重新解釋保守力成立的條件，其實就是在每一個位置 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ 上，有一個唯一的位能值($U(\vec{r})$或寫成 $U(x,y,z)$)。此外，從外力表示為位能的偏微分

計算式(如 7.8-2 式所示)，我們還可以找到另一個檢查保守力的方法，即是

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}F_x = \frac{\partial}{\partial x}F_y\,, \quad \frac{\partial}{\partial z}F_y = \frac{\partial}{\partial y}F_z\,, \quad \frac{\partial}{\partial x}F_z = \frac{\partial}{\partial z}F_x$$

從符號運算式中，可以瞭解到是因為我們選擇的笛卡兒座標系統，座標軸與軸之間互相垂直，彼此獨立運算不相干擾，因此偏微分的計算可以先後對調，而有了先後對調的計算後，就可以找到檢查外力 $\vec{F}$ 是否為保守力的計算方式。

7.9 位能圖與系統平衡

在處理物理或是化學問題，我們常常會看到位能隨物體位置變化的圖形，且從位能圖可以判斷出物體(系統)是否能穩定待在這個位能〝環境〞。譬如要探索兩個原子的鍵結問題，我們把其中一個原子當作系統，另一個原子當作環境，計算出在不同距離下，這個環境對系統吸引或排斥的力量，並計算出位能大小，藉由位能值可判斷出兩原子是否可鍵結，若可鍵結還可計算出鍵結時兩原子間的距離。這時如果知道物體的總能量，甚至能判斷出物體是否能持續待在環境，或因能量高而離開這個位能的環境。我們先從位能與外力間運算的關係（以下三種圖示），了解何種位能可提供物體穩定的環境。

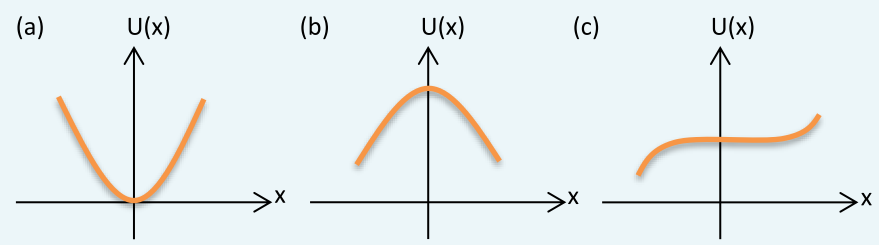

圖 7 - 13 三種不同的位能圖。

幾種典型的位能圖如圖 7 - 13 所示，從位能轉換成外力的關係 $F = -dU/dx$ 來判斷，在圖(a)中當物體(系統)在原點($x = 0$)附近時，在原點右邊位能斜率為正值代表外力向左，原點左邊斜率為負值代表外力向右，這樣的位能我們將它比喻成吃飯用的碗，而物體(系統)像是彈珠被困在碗底，輕輕搖晃一下碗只會讓彈珠稍微滾動但不會離開碗底。而圖(b)與圖(a)相反，好像是把碗倒置過來再把彈珠放到頂部，稍微搖晃一下彈珠就從倒置的碗頂部滾落至底部。圖(c)的位能圖亦顯示物體自原點向左側運動會離開這個位能環境，

而向右側運動則會穩定的停留在原點附近。對於前述三個位能圖，我們知道物體在原點附近所受外力都為零，也就是達到靜力平衡，但在有其它外力擾動的情況下，只有**圖(a)**位能能持續讓物體停留在原點附近，提供穩定的平衡。要確認位能在某位置外力是否為零，及此位置是否可提供穩定的平衡，我們可由位能對位置的一次微分與二次微分值來判斷，我們將在後續例題中示範檢測位能的靜力平衡計算。

例題 7-11：假設物體在 $a > x > -a$ 範圍內受一環境外力，且外力所屬的位能為 $U(x) = -b\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$，其中 a 與 b 為正實數的常數。試問(a)外力隨位置變化的函數(b)外力為零的位置(c)在外力為零之位置是否穩定平衡？

(a)

位能對 x 微分計算外力 $F(x) = -\frac{dU}{dx} = b\left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a+x)^2}\right)$

(b)

外力為零的位置為 $F(x_0) = 0$，即 $b\left(\frac{1}{(a-x_0)^2} - \frac{1}{(a+x_0)^2}\right) = 0$

可整理為 $(a+x_0)^2 - (a-x_0)^2 = 0$ 則 $x_0 = 0$

即在 $x = x_0 = 0$ 位置上，外力為零。

(c)

利用位能對 x 的二次微分，找出在 $x = x_0$ 位置的值，若值大於零即表示穩定。

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-b\left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a+x)^2}\right)\right)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -b\left(\frac{2}{(a-x)^3} + \frac{2}{(a+x)^3}\right)$$

帶入 $x = x_0 = 0$ 可得 $\frac{d^2U}{dx^2} = -b\frac{4}{a^3} < 0$ 表此位置為不穩定的平衡。

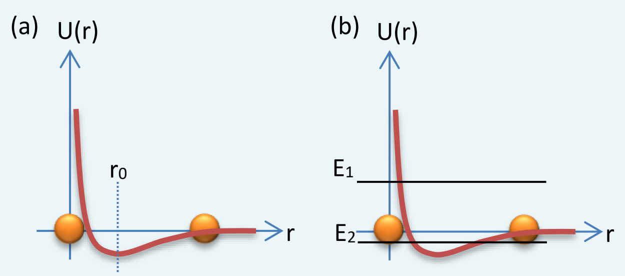

圖 7 - 14 兩原子鍵結的位能示意圖。

我們可由位能圖了解環境本身是否有靜力平衡位置？位能是否穩定平衡？還能結合物體總能量來判斷是否能穩定存在此環境中。譬如把一原子當作環境放在原點位置，提供如圖 7 - 14(a)的紅色曲線位能圖，右邊橘色球所代表的原子為系統，受原點位置的原子(左邊橘球)所提供位能影響。而我們從位能變化觀察到當兩原子距離 $r = r_0$ 時，外力為零，大於這個距離為吸引力，小於這個距離則為排斥力。圖 7 - 14(b)把系統(右邊橘球)的總能量(E_1 或 E_2 ，平行於零位能軸線的黑線)標示出來，當系統能量為 E_1 時，系統碰撞環境後離開，表示沒有產生鍵結；如系統能量為 E_2 時，即系統能穩定存在此環境位能，表示兩原子產生鍵結。同學未來在進階的物理與化學課程裡，會經常遇到使用類似的位能圖與系統總能量來解釋兩物體間的交互作用。

習題